

DE LA PODURILE DIN KÖNIGSBERG LA SOCIAL MEDIA

Teoria grafurilor și rețelele complexe

JAVIER GALEANO și JUAN MANUEL PASTOR

Traducere de Răzvan Staicu și Ana-Maria Merticaru

CUPRINS

Capitolul 0

Euler, maestrul nostru, al tuturor	7
<i>Master Oiler</i>	7
Podurile, nu din Madison County, ci din Königsberg	8
Primii ani	10
Sankt Petersburg și Berlin	11
Pierderea vederii	12
Ultimele zile	13
Contribuțiile lui Euler la științele matematicii	14
<i>Euler în literatură</i>	15
Euler și teoria grafurilor	17
<i>Toate poartă numele lui Euler</i>	19
Ce s-a întâmplat până la urmă cu podurile?	21

Capitolul 1

Ce este un graf?	23
Exemple de grafuri	25
<i>„Rețeaua”</i>	26
Elementele unui graf	28
Tipuri de grafuri	31
Reprezentarea matricială a unui graf (puțin schematizată)	35
Ce informații oferă un graf?	37
<i>Puterea matricei de adiacență</i>	46
<i>Clubul bogaților</i>	50
Unele grafuri speciale	61

Capitolul 2

Modele pentru generația de grafuri	63
Teoreme matematice și cafea: grafuri aleatoare	63
<i>Care este numărul lui Erdős al nostru?</i>	64
<i>Modelul Erdős-Rényi</i>	66

Rețele din lumea mică	67
<i>Grafuri din «lumea mică»</i>	68
<i>Greierii și rețelele din lumea mică</i>	70
<i>Cum sunt distribuțiile gradelor libere de scală?</i>	72
Grafurile în viața reală. Trecerea de la Graf la Rețea	74

Capitolul 3

Rețele sociale	77
Exemple de rețele sociale	78
<i>Numărul lui Bacon</i>	80
Experimentul lui Milgram	80
<i>Observații asupra experimentului lui Milgram</i>	83
Puterea prieteniei	84
Cum reușește Google să caute atât de rapid?	87
Invazia păsărelelor: tweet, tweet!	91
<i>Cum să fie aranjați invitații la masa de nuntă?</i>	94
Grafuri colorate	94

Capitolul 4

Ecologia, grafurile în natură	101
Cine pe cine mănâncă	102
Prietenia între specii diferite	105
Reziliența ecosistemelor	110
Ecologia bacteriilor	114

Capitolul 5

Epidemii	117
Modele pentru studiul unei pandemii	117
Model de Propagare Zombi (SZM)	119
Modele epidemiologice în rețele	124

Anexe	131
Glosar de bază	133

Lecturi recomandate	137
----------------------------	-----

Capitolul 0

Euler, maestrul nostru, al tuturor

Master Oiler

Oiler, oiler!
The students cry
As they have frictions
With π and i .

Master Euler
Came to see,
And solved the problem
Inventing e .

Only an oiler
As Euler can
Equate these three
To minus one.

A picture of Euler is on my wall
As he's the Master Oiler
Of us ALL.

Ernesto Estrada¹

¹ În timpul unui examen de Inginerie matematică, pentru a rezolva o problemă, un student a afirmat că ar aplica „formula Euler” („formula coeficientului de fricțiune”). Îi sunt dator acestui student pentru inspirație.

Strălucitului matematician **Pierre-Simon Laplace** (1749-1827) îi este atribuită fraza: „Citiți-l pe Euler, citiți-l pe Euler, el este maestrul nostru, al tuturor”, deci pare să fie strict necesară aprofundarea gândirii marelui matematician al Iluminismului.

Dedicăm capitolul introductiv unuia dintre geniile indiscutabile ale științelor matematice. Euler și-a adus contribuția în ramurile analizei, algebrei și geometriei, dar a ajutat și la fondarea altora, precum teoria analitică a numerelor, teoria grafurilor și geometria diferențială. Dar nu numai atât: a lucrat ca matematician aplicat asupra tematicilor referitoare la mecanică, optică, electricitate și acustică.

Lucrările sale sunt impresionante, atât prin calitate, cât și prin cantitatea acestora. Culegerea care cuprinde studiile sale este cunoscută sub titlul *Opera Omnia* și constă în 76 de volume. În cartea lui William Dunham despre Euler, acesta este definit astfel: „o adevărată cascadă Niagara, un om capabil să scrie științele matematice mai repede decât ar putea cea mai mare parte a celorlalți oameni să le asimileze”.

Dar să ne oprim asupra teoriei grafurilor, subiectul interesului nostru. Când Euler își redacta articolul despre podurile din Königsberg, nu și-ar fi putut închipui repercusiunile pe care studiul său avea să le aibă atât în lumea științelor matematice, cât și în lumea reală.

Podurile, nu din Madison County, ci din Königsberg

Povestea noastră începe oarecum frivol. Se poate presupune că o ramură importantă a științelor matematice ar izvorî dintr-o reflecție profundă asupra câtorva probleme fundamentale ale naturii sau asupra matematicii înseși. De fapt, totul își are originea într-un joc de matematică, una dintre distracțiile tipice ale locuitorilor din orașele prospere ale secolului al XVIII-lea.

Să ne întoarcem în secolul al XIII-lea, când, în anul 1254, cavalerii teutoni au întemeiat orașul Königsberg^{*}). Datorită poziției sale

^{*} Este vorba despre orașul Königsberg, din Prusia: astăzi, Kaliningrad, în Rusia (n.t.).

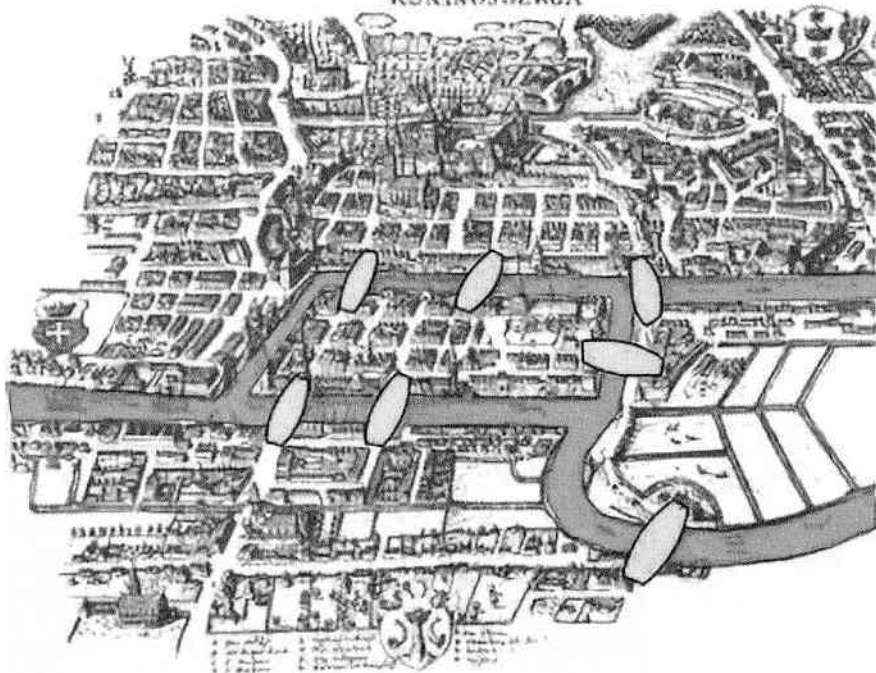


Figura 1. Harta orașului Königsberg în epoca lui Euler. Râul Pregel este indicat în culoare închisă, iar podurile din Königsberg, în gri-deschis.

strategice pe ambele maluri ale râului Pregel, Königsberg devine repede un oraș bogat, locuit de negustori înstăriți. Acest fapt a permis construcția a șapte poduri peste cursul apei, în jurul insulei Kneiphof, situată în centrul orașului. Podurile acestea (Podul Fierarului, Podul de Legătură, Podul Verde, Podul Pieței, Podul de Lemn, Podul Înalt și Podul Mierii) stabileau comunicarea între cele patru zone în care râul împărțea orașul.

Locuitorii din Königsberg, după cutuma unei bune părți dintre contemporanii lor, aveau obiceiul să se plimbe duminica prin centrul orașului, traversând majoritatea podurilor. Atunci a ajuns popular un joc. Acesta consta în găsirea unui parcurs pe străzile Königsbergului care să traverseze toate podurile o singură dată. A apărut chiar și o variantă ipotetică neoficială a problemei:

Se dă harta orașului Königsberg, pe care râul Pregel divide planul în patru zone diferite, legate între ele prin cele șapte poduri; este posibil un parcurs care să pornească dintr-un punct oarecare din oricare dintre aceste zone, să treacă peste toate podurile, să-l străbată pe fiecare o singură dată și să se întoarcă exact în acel punct de pornire?

O astfel de ghicitoare marchează apariția unei prolife ramuri a științelor matematice. O vom relua ceva mai încolo, ca să descoperim cum a rezolvat-o Euler, declanșând astfel prima ipoteză a teoriei grafurilor, dar mai întâi vom face o scurtă digresiune, pentru a cunoaște mai bine viața acestui matematician care s-a dovedit fundamental în evoluția istoriei științelor matematice.

Primii ani

Leonhard Paul Euler s-a născut la 15 aprilie 1707, la Basel, oraș elvețian pe râul Rin, în punctul de întâlnire al frontierelor elvețiene cu Germania și cu Franța. Tatăl său, Paul Euler, era un pastor calvinist, iar mama, Marguerite Brucker, era și ea fiică de pastor. Deci totul părea să sugereze că lui Leonhard i-ar fi fost destinat să se ocupe de o parohie. A avut două surori mai mici, Anna Maria și Maria Magdalena.

Era un băiat precoce, dotat cu o memorie prodigioasă și cu o înclinație specială pentru limbile străine. Era capabil să memoreze poeme, rugăciuni și liste de numere prime, precum și să efectueze în minte calcule foarte complicate. Paul Euler a fost discipolul lui **Jakob Bernoulli** (1654-1705), membru al celebrei familii de matematicieni elvețieni. Probabil că tocmai raportul dintre familia lui Euler și cea a lui Bernoulli a fost cauza pentru care tânărul Leonhard nu a devenit pastor în comunitatea sa, așa cum era plănuț. La numai 14 ani, a intrat la Universitatea din Basel, cu ideea de a-și urma tatăl în cariera de preot protestant. Aici, s-a dedicat studiului teologiei și al limbilor greacă și ebraică. La trei ani după intrarea la universitate, și-a obținut licența în filosofie, cu o comparație între gândirea lui René Descartes și aceea a lui **Isaac Newton** (1642-1727).

În acea vreme, Euler a început să-l frecventeze ca student pe **Johann Bernoulli** (1667-1748), cu permisiunea să-i fie asistent colaborator sâmbăta după-amiază. Bernoulli a intuit imediat talentul pentru științele matematice al noului său protejat și a intervenit ca să-l convingă pe Paul Euler că Leonhard era sortit să devină un mare matematician.

În 1726, Euler avea să-și susțină doctoratul cu o teză având ca temă propagarea sunetului, intitulată *De Sono*.

Sankt Petersburg și Berlin

Tot în anul respectiv, cei doi fii ai lui Johann Bernoulli, Daniel și Nicolaus, lucrau în Sankt Petersburg, la Academia de Științe din Rusia. Nicolaus moare în urma unei apendicite în iulie. În consecință, Daniel ia locul fratelui în departamentul de Științe Matematice și Fizică și, în același timp, recomandă pentru postul rămas vacant în departamentul de Fiziologie pe prietenul Euler, care acceptă oferta în luna noiembrie a aceluiași an.

Academia de Științe din Sankt Petersburg fusese fondată de către Petru I al Rusiei, cu obiectivul de a ridica nivelul cultural al țării. Împăratul Petru cel Mare încerca astfel să atragă oameni de știință iluștri din întreaga Europă. Precum și alte instituții de acest fel, Academia depindea în mare măsură de mecenajii și de conducătorii vremii. În timpul domniei lui Petru I și, mai apoi, a soției sale, împărăteasa Ecaterina I a Rusiei, Academia se mândrea cu o excelentă bibliotecă finanțată din fondurile personale ale monarhului și ale nobililor, conta pe resurse financiare solide și admitea la studii un număr limitat de studenți, pentru a le permite profesorilor să-și dedice timpul mai ales propriilor cercetări științifice. Se întâmplă însă ca, exact în ziua în care Euler pășește pentru prima dată în Sankt Petersburg, împărăteasa și marea mecenată Ecaterina I să moară; în consecință, fondurile destinate Academiei aveau să sufere reduceri drastice.

În 1733, Daniel, obosit de dificultățile din ce în ce mai mari întâmpinate la Academia de Științe, părăsește Rusia pentru a se

întoarce ca profesor în Elveția; astfel, Euler ajunge să-i fie succesor ca director al departamentului de Științe Matematice.

Odată ce și-a asigurat un post stabil, Euler se căsătorește cu Katharina Gsell, fiica unui pictor elvețian stabilit în Rusia. În cele peste patru decenii de căsnicie, soții Euler au adus pe lume treisprezece copii, dar numai cinci dintre ei au ajuns la pubertate și doar trei au reușit să le supraviețuiască părinților.

În anul 1741, Euler părăsește Sankt Petersburg pentru un post la Academia din Berlin, care îi este oferit de către regele Frederic al II-lea al Prusiei, zis cel Mare, în persoană. Timp de douăzeci și cinci de ani trăiește în orașul german, capitala de astăzi, scriind peste 380 de articole. Aici, la Berlin, compune lucrările care aveau să-i aducă celebritatea: *Introductio in analysin infinitorum*, despre funcții, publicat în 1748, și *Institutiones calculi differentialis*, publicat în 1755, pe tema calculului diferențial.

Ca o mențiune în plus, i s-a oferit rolul de tutore al prințesei Anhalt-Dessau, nepoată a regelui Frederic, cu care a corespondat în peste două sute de epistole, adunate mai târziu într-un volum cu titlul *Scrisori către o prințesă germană*. Această operă, devenită cea mai citită, conține ideile lui Euler despre științele matematice și fizică, pe lângă viziunea sa personală asupra vieții și a religiei. Până la urmă, Euler s-a văzut constrâns să părăsească Berlinul din cauza unor conflicte apărute între el și același rege Frederic.



Figura 2. Portretul lui Leonhard Euler în 1753, de Jakob Emanuel Handmann.

Pierderea vederii

În 1735, Euler suferă un atac de febră care îi amenință viața, iar trei ani mai târziu, își pierde vederea ochiului drept. De la această întâmplare, avea să primească numele de „Ciclop”, pe care îl folosea chiar regele Frederic.

În plus, Euler este afectat de cataractă și la ochiul sănătos, fapt care îl lasă practic orb.

Cu toate acestea, continuă să lucreze neobosit, compensând parțial orbirea prin extraordinara sa capacitate de a face calcule în minte. Multe dintre lucrările sale sunt dictate de Euler fiului său cel mare.

Ultimele zile

Situația în Rusia devine mai bună datorită ascensiunii Ecaterinei a II-a, numită și cea Mare, motiv pentru care în 1766 Euler a acceptat invitația de a se întoarce la Academia din Sankt Petersburg.

A doua sa perioadă rusă a fost marcată de câteva tragedii. În 1771, un incendiu izbucnit în casa sa din Sankt Petersburg aproape că îl costă viața, iar în 1773 își pierde soția, pe Katharina Gsell. Totuși, Euler se recăsătorește, trei ani mai târziu, cu Salome Abigail Gsell, sora primei soții, dinspre partea tatălui acestor. Căsnicia lor a durat până la moartea matematicianului.



Figura 3. Fotografia mormântului lui Leonhard Euler, de la Mănăstirea Aleksandr Nevski din Sankt Petersburg.

În ziua de 18 septembrie 1783, Euler și-a dat ultima suflare, în Sankt Petersburg, ca urmare a unor probleme cardiovasculare. A fost înmormântat alături de prima sa soție, în Cimitirul Lutheran de pe insula Vasilievski. Mai târziu, rămășițele sale pământești au fost transferate la Mănăstirea Aleksandr Nevski.

Contribuțiile lui Euler la științele matematice

Euler a fost unul dintre matematicienii cei mai prolifici din istorie. A scris, în medie, opt sute de pagini pe an în perioada sa cea mai fecundă, între 1727 și 1783. Este un fapt de notorietate că o mare parte din activitatea sa științifică nu a fost încă publicată.

Proiectul de redactare și de publicare a lucrărilor sale complete, *Opera Omnia*, își are începutul în anul 1911, iar, până astăzi, au apărut 76 de volume, deși proiectul original era acela de a aduna 887 de teme în 72 de volume. Euler este considerat autorul căruia îi este atribuit cel mai mare număr de lucrări și de articole, comparabil numai cu extraordinarul Gauss.

Un alt mare succes al lui Euler constă în introducerea și divulgarea notației simbolice matematice utilizate astăzi. Cu toate acestea,

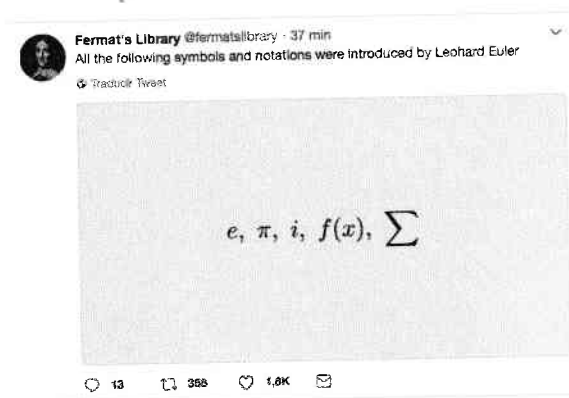


Figura 4. Postare de pe Twitter, datată 11 iunie 2018, despre simbolurile matematice introduse de Euler.

probabil contribuția sa cea mai importantă este introducerea reprezentării funcției matematice. El a fost primul care a utilizat notația $f(x)$ pentru a face referire la o funcție f aplicată argumentului x .

A introdus notația modernă a funcțiilor trigonometrice, litera grecească Σ , ca simbol al sumei, și litera i care se referă la unitatea imaginară. Și tot el a fost cel care a determinat răspândirea literei grecești π pentru numărul irațional care fixează raportul dintre circumferința și diametrul unui cerc. Așa cum vom vedea în secțiunea următoare, tot Euler a fost primul care a folosit litera e ca bază a logaritmului natural sau napierian.

Numărul lui Euler

Numărul e , cunoscut ca „numărul lui Euler” sau „constanta lui Napier”, a fost folosit pentru prima dată de matematicianul scoțian **John Napier** (1550-1617), care a introdus conceptul de logaritm în calculul matematic. Acest număr are un rol important în calculul și în analiza matematică, dovedindu-se de o importanță fundamentală în definiția funcției exponențiale.

EULER ÎN LITERATURĂ

Cartea tradusă cu titlul *Formula Profesorului*, opera autoarei japoneze Yōko Ogawa, a fost premiată de mai multe societăți de matematică. Chiar dacă este vorba de un roman, în multe fragmente se vorbește despre felul în care un bătrân profesor bolnav este capabil să explice științele matematice. În carte apar diferite formule și, firească, una dintre cele mai importante este identitatea lui Euler.

Numărul e este un număr irațional și, mai ales, transcendent, adică nu poate fi rădăcina niciunei ecuații algebrice cu coeficienți raționali. Valoarea lui e , limitată la primele sale cifre zecimale, este următoarea:

$$e = 2,71828182845904523536...$$

Se poate spune că numărul e este numărul fundamental pentru calcul, așa cum π este pentru geometrie, iar numărul i , pentru analiza complexă, precum și pentru algebră.

Identitatea lui Euler

Se păstrează în vigoare o interesantă relație matematică numită „identitatea lui Euler”, despre a cărei frumusețe s-a scris într-o serie infinită de cărți, inclusiv în unele din alte domenii decât științele matematice. După părerea mea, două elemente dau măreția unei astfel de relații: simplitatea sa și componentele sale aparent dispartate. Formula este următoarea:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Numerele prezente în formulă sunt deosebit de interesante. Pe lângă alte elemente neutre, cel al adunării și cel al înmulțirii, care sunt 0 și, respectiv, 1, aceasta cuprinde numerele iraționale cele mai relevante: al geometriei, π , al calculului, e , precum și numărul imaginar $i = \sqrt{-1}$. Așa cum putem constata, în această formulă sunt prezente toate numerele semnificative.

În realitate, nu este sigur că Euler ar fi scris personal formula în versiunea ei cea mai simplă. Este, în schimb, confirmat că făcuse acest lucru în așa-numita „formulă a lui Euler”, în care sinusuri și cosinusuri sunt puse în relație cu numerele complexe. Cu toate acestea, eleganța formulei rămâne incontestabilă.